Novae rationis quotcunque aequationes quotcunque quantitatum variabilium geometrice construendi specimen.

Quod ex auctoritate

Amplissimi PHILOSOPHORUM Ordinis

IN ACADEMIA VRATISLAVIENSI

pro

SUMMIS IN PHILOSOPHIA

honoribus rite capessendis

die VI. M. Augusti MDCCCXLI

H. L. Q. C.

publice defendet auctor

Lud. Alexander Koch.

Adversariorum partes agent:

Carolus Sondhauss, Dr. philos. et sem. paedag. sod.
Mauritius Jacobi, sem. paedag. sod.
Hugo Dittrich, cand. philos.

Adjecta est tabula lithographica.

VRATISLAVIAE,
TYPIS FRITZIANIS.

VIRO

DOCTISSIMO, SUMME VENERANDO

ERNESTO JULIO SCHOLTZ,

PROFESSORI P. O., DOCTORI PHILOS.

PRAECEPTORI OPTIME MERITO

HAS

STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

D. D. D.

AUCTOR.

Introductio.

Geometria analytica et analysis pura, quas dicunt, in eo tantum differre videntur, quod hujus ratio, leges, formulae ad omnes valent quaestiones cujusvis generis et nominis, illa in certo quodam campo analysi utitur. Dum enim aequationum analyticarum omnino est quantitates ita determinare, ut ad alias certam habeant relationem; dumque eorum, qui eas solvunt, nihil interest, cujuscunque generis et nominis quantitates sint, dummodo eas metiri possint: in geometria analytica quantitates speciatim ad unitates geometricas referuntur, illaeque solvuntur quaestiones, quae sunt circa loca ab aliorum positione pro lege certa dependentia.—Qua ex cognatione disciplinarum fit, ut altera alteri magno sit commodo. Analysi geometria facillime et foecundissime utitur: haec ipsa illi pulcherrimum affert usum, nec non permultas res difficiliores perspicue explanat: quin altera uti licitum est, ut alterius detegamus novas proprietates. Cum ita multa habeamus analytica, quae ex similibus geometricis collegimus, tum maxime geometriam permulta auxerunt, quae ex generaliore analyticorum ratione prodierunt. Quamquam enim in geometria analytica multa occurrunt, quae singulari natura sunt, ut frustra eorum similia in analysi quaesiveris: tamen, quidquid ex legibus pure analyticis proficiscitur, nullo modo negligendum est, sed quodammodo ad geometriam quoque valet; nisi demonstrari potest, agi de re prorsus contraria.

Quod quotiescunque considerabam, verisimile mihi videbatur, quum analysis aequationes admitteret quotlibet quantitatum variabilium formulasque et leges ad quemlibet earum numerum transduceret, geometriam analyticam comparari posse, quae circa plures quam binas ternasve coordinatas versaretur aequationesque plurium variabilium geometrice describeret. Ad qnod enim perficiendum nihil opus esse videtur, nisi ut singulis quantitatibus variabilibus geometricae significationes tribuantur, quarum nulla impedimento sit, quominus aliae scribantur. Nec non ad eandem rem accuratius investigandam progressus neminem

inveni, qui causis satis persuaderet, vetitas esse coord natas plures duabus in plano, plures tribus in spatio liber Verum sunt geometrica exempla, quae variandis quantita tibus, quae alias pro constantibus habentur, revera plure variabiles in geometriam introducant, modo quae non coo dinatae sint: quamquam ne in his quidem quaestionibu prorsus pro variabilibus usurpantur, cum variantes no fiant, nisi differentiantur. Tantum quoque abest, ut eju dem rei satis jam ratio habita sit, ut haec exempla nequ inter se cohaereant, neque cum aliis partibus geometria analyticae.

Principiis hujus disciplinae accuratius determinatis e perveni, ut in plano pariter atque in spatio libero et quo libet et quarumlibet coordinatarum usum permitti conte dam, ut significationem geometricam quotlibet aequationu quotlibet variabiles amplectentium in universum quodan modo indicare possim.

Nec non totam geometriam analyticam scribere exo sus sum nova ratione, quam satis memorabilem fore sper quum non solum multa nova detegantur, sed tota disciplir ad eam generalitatem transducatur, quam usque non ex stere putavimus. Ut autem totus is campus vastior es quam qui ab uno viro perlustrari possit; ita multum abe ut ego quoque omnia investigaverim, quae accuratiore i vestigatione digna sunt. Quamquam jam per aliquod te pus huic operi incumbo, tamen non nisi parvam parte operis absolvi. Qua de causa parvulo hoc specimine ta quam in meum librum introduco: principiis breviter exp sitis pauca exempla investigo, quorum auxilio tamqua obiter summa adumbro: eum in finem, ut alii viri doc quid de his rebus sperari possit, videant; ut his exempl admoniti meum opus, ubi typis exscriptum erit, leger eo lecto me in his rebus investigandis adjuvare veli Si geometrae plures et peritiores huic campo aliquod st dium applicent, non dubito, quin eo multa commoda na ciscamur, quibus nunc caremus.

I. Geometria analytica originem duxit etiamnumque nititur eis quaestionibus, quae loca a datis aliis secundum conditiones propositas dependentia determinari jubent. Harum omnes quodammodo duci licet ab eo genere simplicissimo, cum conditiones proponuntur, quibus uno puncto dato aliud scribendum sit. Quae quaestiones cum analytice solvendae dantur, quantitates geometricae eligendae sunt, quae ad certum punctum scribendum adducere possint: eaedemque secundum conditiones propositas analytica ratione determinandae sunt.

In quantitatibus quidem geometricis semper una linea esse debet, neque est ratio, qua punctum pro dato alio definiatur, sine ulla linea. Quodsi autem quis diceret, sola esse utendum linea recta, quae minimam distantiam metiretur et simplicissima esset, hic rem nimis anguste tractaret. Ut enim quamlibet lineam quotlibet partibus constantem ex dato puncto ad alterum determinandum ductam habeamus: ejus altera extremitas semper alterum punctum satis circumscribit, dum omnes ejusdem lineae partes certe definitae sunt forma, positione, longitudine. Qua de re, cum nostra intersit, ut rationem punctorum determinandorum quam generalissimam adumbremus, constituendum videtur, quamlibet lineam e dato puncto ductam, sive simplex sive composita sit, sive rectis sive curvis partibus constet, eum in finem posse adhiberi, dummodo facultate gaudea-

mus, singularum partium formam, positionem, longitudinem pro quaestione proposita determinandi.

Toti huic lineae nomen tribuo lineae coordinaticiae (Coordinaten-Linie) illasque quantitates, quae ad ejus partes determinandas pertinent, nomino coordinatas. Jam omnia coordinatarum genera, quae in vulgari geometria analytica adhiberi solent, his contineri apparet, cum coordinatae polares a linea simplici praebeantur, cujus positio ab angulis variantibus determinatur; coordinatae normales et obliquangulae lineam coordinaticiam duarum vel trium partium rectarum constituant ad angulos constantes applicatarum.

II. Ubi linea quaedam electa est, cujus coordinatis conditiones quaestionis propositae apte exprimi videntur, hae ipsae aequationibus exprimendae sunt. Novas meas coordinatas facile iis circumscribi, paucis exemplis exponam, nec non qua ratione circumscribantur.

Ex A puncto (fig. 1) proficiscatur radius lucis data directione. Quaeritur, ad quod punctum dati plani OK′ perventurus sit, per plura data plana transgressus, quibus varie refringitur. Commodissime ad punctum quaesitum determinandum h. e pro linea coordinaticia sumetur ille radius lucis ipse, qui rectis lineis compositus erit. Si plana data ad planum chartae normalia esse ponimus, radius ex hoc non excedit, atque refringitur in illorum intersectionibus K‴M,K″N ipsis. Si radii singulas partes nomino x, y, z, earumque positionem circumscribo angulis, quos singulae cum data quadam linea AX constituunt, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, hae sex coordinatae aequationibus determinandae erunt. Plana data sunt datis distantiis $Am=a'''$, $An=a'''+a''$, $Ao=a'''+a''+a'$, angulisque, quos intersectiones ad datam lineam AX constituunt α''', α'', α'. Angulos, qui sunt partibus radii x, y, z, antequam singula plana consequuntur, cum lineis ad ea normalibus, scribe ε''', ε'', ε', angulosque, quos partes fractae ad plana ipsa MK‴, NK″, constituunt, γ''', γ''. Si coefficientes refractionis dati sunt n''', n'', habemus

$\sin \varepsilon''' = n''' \cos \gamma'''$ sive $\cos(\mathfrak{x}-\alpha''') = n''' \cos(\mathfrak{y}-\alpha''')$ (𝔅.)
$\sin \varepsilon'' = n'' \cos \gamma''$ sive $\cos(\mathfrak{y}-\alpha'') = n'' \cos(\mathfrak{z}-\alpha'')$ (𝔇)

Ex triangulis AMm, MNr'', NOr' sequuntur

$$Mm = \frac{a''' \sin \mathfrak{x}}{\sin(\alpha'''-\mathfrak{x})} \text{ et } x = \frac{a''' \sin \alpha'''}{\sin(\alpha'''-\mathfrak{x})} \quad (\mathfrak{A})$$

$$Nr'' = \frac{Mr''. \sin \mathfrak{y}}{\sin(\alpha''-\mathfrak{y})} \text{ et } y = \frac{Mr''. \sin \alpha''}{\sin(\alpha''-\mathfrak{y})}$$

$$Or' = \frac{Nr'. \sin \mathfrak{z}}{\sin(\alpha'-\mathfrak{z})} \text{ et } z = \frac{Nr'. \sin \alpha'}{\sin(\alpha'-\mathfrak{z})}$$

Mr'' et Nr' inveniuntur, ubi r''p'' cum Mm et r'p' cum Nn parallelas duxisti, ex triangulis r''np'' et r'op'.

$$Mr'' = a'' - \frac{r''p''. \sin(\alpha''-\alpha''')}{\sin \alpha''} = a'' - \frac{a''' \sin \mathfrak{x} \sin(\alpha''-\alpha''')}{\sin \alpha'' \sin(\alpha'''-\mathfrak{x})}$$

cum $r''p'' = Mm$; $\quad Nr' = a' - \dfrac{r'p'. \sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin \alpha'}$, unde

$$\text{cum } r'p' = Nr'' + r''n = \frac{a'' \sin \mathfrak{y}}{\sin(\alpha''-\mathfrak{y})} - F$$

$$\text{si } F = \frac{a''' \sin \mathfrak{x} \left[\sin \mathfrak{y} \sin(\alpha''-\alpha''') - \sin \alpha''' \sin(\alpha''-\mathfrak{y})\right]}{\sin \alpha'' \sin(\alpha'''-\mathfrak{x}) \sin(\alpha''-\mathfrak{y})}$$

$$Nr' = a' - \frac{a'' \sin \mathfrak{y} \sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin \alpha' \sin(\alpha''-\mathfrak{y})} + \frac{\sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin \alpha'} \times F$$

Inde prodeunt

$$y = \frac{a'' \sin \alpha''}{\sin(\alpha''-y)} - \frac{a''' \sin \mathfrak{x} \sin(\alpha''-\alpha''')}{\sin(\alpha''-\mathfrak{y}) \sin(\alpha'''-\mathfrak{x})} \quad (\mathfrak{C})$$

$$z = \frac{a' \sin \alpha'}{\sin(\alpha'-\mathfrak{z})} - \frac{a'' \sin \mathfrak{y} \sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin(\alpha'-\mathfrak{z}) \sin(\alpha''-\mathfrak{y})} + \frac{\sin \alpha' \sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin(\alpha''-\mathfrak{z})} F \quad (\mathfrak{E}.)$$

Quinque aequationibus 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 coordinatae inveniri possunt: cum 𝔵 datus sit, ex 𝔄 et 𝔅 statim prodeunt x et 𝔶, harum quantitatum valores nactus ex ℭ et 𝔇 invenire potes et y et 𝔷, harum et illarum auxilio z quoque ex 𝔈: tribus rectis partibus x, y, z ad justas positiones et longitudines conscriptis punctum quaesitum O habebis.

Quoties radius lucis ab ejusmodi planis infringetur, tot partibus atque una erit composita linea coordinaticia; nihilominus valores omnium coordinatarum ad eam pertinentium explicari poterunt. Si plana, quibus radius in-

fringitur, non omnia ad idem planum normalia sint, ad partium x, y, z positiones determinandas saltem binis angulis opus sit. Aptissime ad angulos $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, qui omnes a data AX incipiunt, adjungas angulos, quibus plana angulorum $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ inclinant ad datum planum quoddam ut YAX: apte eos nomines ordine $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. — Si plures praebebuntur partes, eas significa ordine litteris z, y, x, w, v, . . . , ita ut z semper punctum quaesitum O attingat, huic antecedat y, huic x; earum angulos litteris Germanis $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{Y}$; $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{W}$; $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$; . . . ut ex gr. ad w determinandam sint $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{W}$.

III. Si eae quaestiones solvendae dantur, quae aliam quantitatem geometricam (lineam, superficiem, alia) circa aliam moveri jubent, facillime ad aequationes transducuntur usu lineae coordinaticiae plurium partium. Per lineam hyperbolam ducatur centrum lineae circularis variabilis, cujus radius crescat pro centri distantia ab altera linearum asymptotarum, ita quidem, ut ejusdem lineae circularis planum angulum α datum constituat ad planum hyperbolae, amborumque planorum intersectio semper normalis sit ad lineam, quae hyperbolam eodem puncto tangit. Ad exprimendam superficiem oriundam facillimae aequationes praebentur adhibenda linea coordinaticia quattuor partium rectarum z, y, x, w, si w, x ita sumuntur, ut aepuationi hyperbolae $xw - a^2 = 0$; y, z ita, ut aequationi circularis $y^2 + z^2 = \frac{w^2}{b^2}$ satisfaciant. Nec non omnium planorum justae positiones facillime exprimuntur. Si enim angulos, quos z cum y, y cum x, x cum w, w cum data quadam AX constituunt, vocamus $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{w}$, angulosque, quos planum anguli $\mathfrak{z}$ cum plano $\mathfrak{y}$, planum anguli $\mathfrak{y}$ cum $\mathfrak{x}$, planum $\mathfrak{x}$ cum $\mathfrak{w}$, planum anguli $\mathfrak{w}$ cum plano quodam dato YAX efficit, ordine vocamus $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{W}$; facile formaveris aequationes

$$\mathfrak{w} - c' = 0;\ \mathfrak{W} - C' = 0;\ \mathfrak{x} - c'' = 0;\ \mathfrak{X} - C'' = 0$$

$$\text{cotg}\,(\mathfrak{y} + c'') - \frac{x}{w} = 0^{*});\ \mathfrak{Y} = 0;\ \mathfrak{z} - 90^\circ = 0;\ \mathfrak{Z} - \alpha = 0$$

*) $\mathfrak{y}$ enim, qui a producta coordinata x et a linea ad hyperbolam nor-

Hos angulos alios esse, atque quos proximo capite usi sumus, jam animadverteris. Ambo genera digna sunt, quae usurpentur: modo hoc, modo illud rei magis est idoneum. Illis dedi nomen angulis prioris generis sive ab eisdem incipientibus, quum omnes ab eisdem datis ab AX linea et YAX plano tamquam incipiant: hos vocavi alterius generis vel ab antecedentibus incipientes, quum alter angulus ab antecedenti parte incipiat, alter a plano duarum antecedentium partium.*)

Quidquid ad angulos utriusque generis accuratius construendos pertinet, qua ratione positivi vel negativi anguli constituendi, qua positivae negativaeve partes ducendae sint, ea omnia in majore meo opere satis illustravi: in hoc libello omitti poterunt.

Aliam rem noto. In hujus quaestionis aequationibus septem sunt, quae nihil praescribant, nisi ut certis angulis singuli tribuantur valores, qui constantes vocantur. Quamquam ei, cui loca geonetrica describenda dantur, maxime necessarium est, hos valores cognoscere; tamen similiter, atque in vulgari geometria analytica constantes anguli coordinatarum a coordinatis excluduntur, ego quoque neque ejusmodi quantitates in coordinatis numerabo, neque ejusmodi aequationes in aequationibus numerare solebo.

IV. Ac ne linearum quidem coordinaticiarum curvis partibus compositarum usus a geometria analytica excluditur. Quamquam concedendum est, nobis pausissimarum adhibendarum facultatem esse; tamen quaestiones locaque geometrica sunt, in quibus describendis ita omnes aliae methodi posthabendae sint, ut ad curvarum coordinatarum

---

mali formatur, aequat $90^0 - (c'' - \varphi)$, dum est $c'' = \mathfrak{x} =$ angulo ab x et producta w incluso, φ angulus, quem linea hyperbolam tangens ad axem w constituit, ut sit tang. $\varphi = \frac{dx}{dw} = -\frac{x}{w}$

*) Hoc in libello semper hos angulos alterius generis sumptos esse puta, nisi apertis verbis dico, priores construendos esse.

usum geometrae jamdudum quasi non sentientes deducti sint. Ita lineam, quae vocatur spiralis parabolica, determinandam dant (fig. 2) arcui circulari AmN, cui ad angulos rectos partes rectae NO′ et NO″ adjunguntur. Similiter lineae per superficies cylindricas ductae (fig. 3) inter curvas partes basin cingentes AmN′, AmN″, quae pro abscissis sumuntur et rectas partes laterarias N′O′, N″O″, . . . quae pro ordinatis sunt, exprimuntur.

Aliae multae quaestiones sunt, quas curvarum coordinatarum auxilio solvere possimus. — Circa lineam circularem radii R, in qua punctum A datum est, alia linea circularis radii r ita movenda est, ut in puncto intersectionis eae lineae, quae ambas tangunt, certum angulum β constituant, planumque hujus anguli cum plano prioris circularis datum angulum γ. Si semper linea circularis, dum movetur, simul aequabili celeritate circa centrum circumagitur, nosque quaerimus, quam lineam certum punctum O lineae motae describat; hujus positionem pro dato A determinare possumus linea e duobus arcubus circularibus y et z composita et aequationibus

$$z = f\,(y),\ \mathfrak{y} = c,\ \mathfrak{Y} = C,\ \mathfrak{z} = \beta,\ \mathfrak{Z} = \gamma.$$

Si linea mota, dum n$^{\underline{ies}}$ circumagitur, semel circa lineam non motam proficiscitur, prima aequatio est

$\frac{z}{r} = \frac{ny}{R} + C.$ Si quis curvis lineis uti vult, non opus est, ut omnium longitudo in lineis rectis accurate possit abscidi. Hic z et y metiri poteris eo arcu, qui in linea circulari radii $=1$ ad angulum centri $=1$ pertinet: quam unitatem ipsa $\frac{z}{r}$ n$^{\underline{ies}}$ saepius complectitur quam $\frac{y}{R}$. Quemcunque igitur arcum y sumimus, cum eo eum adjungi arcum z necesse est, cujus angulus centri angulum illius y n$^{\underline{ies}}$ multiplicatum constanti angulo C superat. Centri positio, qua ad arcus z ducendos opus est, angulorum $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$, radiique r auxilio inveniri potest. — Lineam descripsi, (fig. 4) quae datur a radio $r = \frac{1}{2}$ R, a conditionibus $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, $\mathfrak{y} = 90^\circ$, $\mathfrak{z} = 30^\circ$, et ab

aequatione z=y, quae evenit, si $n = \frac{R}{r} = 2$ et C = o, h. e., si initio punctum O supra A positum erat. — Adeo lineae curvae forma variantes usurpari possunt. Nihil impedit, quominus construamus, etiamsi quaestioni conditio addita sit, ut radius circularis motae crescente arcu percurso ipse crescat. Quae conditio si additur, alia aequatio addenda est r=m.y. In quocumque arcus y puncto z applicare voles, postquam angulis 𝔷, 𝔃 construendis positionem lineae illum z tangentis inveneris lineamque ei normalem duxeris, centrum circularis motae habebis radio r proxime = my in ea abscidendo; atque circa centrum similiter ut supra is arcus z applicandus erit, qui ad n$^{\underline{ies}}$ majorem angulum centri pertinet, quam qui ad y pertinet (si quidem C=o). Construxi imaginem (fig. 5), si $m=\frac{1}{2}$, R=1,$n=\frac{3}{2}$,C=o, ad hoc iterum 𝔜=𝔃=o, 𝔶=90°, 𝔷=30°.

Ut in his exemplis loco coordinatarum lineis circularibus usus sum, similiter in aliis alias usurpari posse curvas, nemo negabit.

V. His exemplis non solum monstratum est, quomodo quaestiones ad aquationes transducantur, sed etiam re ipsa probavi, lineas coordinaticias cujuslibet generis ad quaestiones geometricas posse adhiberi. Nihilominus multum abest, ut, cum quaedam quaestio revera proponitur, ad ejus locum geometricum determinandum quaslibet coordinatas adhiberi licitum sit. Plurimae enim lineae coordinaticiae difficiliores sunt, quam quae construi possint, etiamsi omnium coordinatarum valores noti sint: multae, quae describi possunt, saepe aequationes praebent, ex quibus valores explicari nequeunt; etiam aequationes, quae ipsae formari non possunt. Sequitur, ut vulgaris quoque geometria analytica, quae nullas fere lineas eligat praeter lineas duarum triumve partium rectarum ad angulos constantes constitutarum, multis commodis careat. Aliae enim et multae lineae dantur, quas construere possis. Ad hoc quanta multitudo quaestionum, si vulgaribus coordinatis construen-

dae dantur, aequationes involvit, quae neque solvi neque construi possint. Harum multae usu novarum coordinatarum ad aequationes transducuntur, quae solvi possunt, quae multo facilius construuntur.

Hujus generis omnes quaestiones sunt, quas his capitibus tractavimus. Si eas ad vulgarium coordinatarum aequationes transducere velis, nullo modo ad finem pervenias. Quamquam in quaestione capitis secundi totus radius lucis eodem plano continetur, tamen multum abest, ut O duabus coordinatis determinari possit: neque obliquangulis Ao et oO potest neque normalibus AP et PO. Statim quidem habes $Ao = a''' + a'' + a'$, tamen $oO = \frac{Nr' \sin \mathfrak{z}}{\sin(\alpha' - \mathfrak{z})} + \frac{r'p'. \sin \alpha''}{\sin \alpha'}$, cum qua formula, ubi valores Nr' et r'p' supra (cap. II) expliciti substituti sunt, aequationes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ conjungendae sunt ad aogulos $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ eliminandos. Ji vero eliminari possunt vix ex his, vix ex normalibus

$$AP = z. \cos \mathfrak{z} + y. \cos \mathfrak{y} + x. \cos \mathfrak{x}$$

$$\text{et } PO = z. \sin \mathfrak{z} + y. \sin \mathfrak{y} + x. \sin \mathfrak{x}, \text{ ubi}$$

valores z, y, x substituti sunt. Similiter alias qnaestiones, quas tractavi, in vulgares coordinatas permutari posse nego.*) Cum autem ita sperari possit, fore ut saepius novarum coordinatarum usu, quae non ita difficilius construuntur, faciliores dentur aequationes, quamquam plures; quid est, quod hanc solvendi rationem spernas.

VI. Hac nova coordinatarum definiendarum ratione fines geometriae analyticae longe prolati sunt. Cum enim hucusque paucissima genera praebuerit aequationum, quae construi possint, paucissimas lineas et superficies aequationibus expresserit; meam rationem secutus vix spatium habebis, omnium generum facilium rationem habendi. Cum enim lineae coordinaticiae partes cujuslibet multitudinis atque varii generis sumi licitum sit, cum in unaquaque

---

*) Quid? etiam in majore meo opere accuratius demonstravi, etiamsi novas coordinatas in vulgares possimus permutare, raro dari ab harum aequationibus atque ab illis geometricam significationem omni ex parte eandem.

modo has modo illas partes, hos illosve angulos variantes facere possimus, innumera gignuntur coordinatarum systemata. Dum solum ad horum simplicissima aequationes, quae construi possint, referuntur, magna varietate imagines (ita semper vocabo loca geometrica) praebentur Ad hoc non solum varius quoque numerus aequationum ad quodque coordinatarum systema referri potest, sed ne coordinatas quidem et quantitates indeterminatas*) eodem numero dari necesse est. Quamquam hae saepissime eae sunt, quae coordinatas in aequationibus repraesentant, quae igitur numero eas aequant; tamen fieri potest, ut coordinatae indeterminatas superent, etiam ut ab his illae superentur. Saepe jam in vulgari geometria analytica occurrunt aequationes, quae aliquam coordinatam non habeant; in aliis disciplinis ut in mechanica evenit, ut quantitates variabiles in aequationibus insint, quae vires, celeritatem, alia representent. Ut tamen in his disciplinis saepe aequationes construendae dantur; ita quae in iis singulares aequationum occurrunt formae, eae ad geometriam pertinent; atque illae quidem peculiares quantitates, quas habent, etiamsi proprie non construuntur, tamen cum valores imaginarios excludant, aliquam vim exercent in imagines geometricas. Hujusmodi vero quantitatum ita in geometria ratio habenda est, ut nihil nostra intersit, quid proprie repraesentent. Modo saepius de indeterminatis non repraesentatis verba faciam, eaeque semper valores imaginarios excludent.

Cum majorem meum librum leges, miram ita imaginum varietatem praeberi videbis, quamquam vix unum exemplum ad quodque simplicissimorum systematum refero**): eo perveni, ut fere quamvis imaginem geometricam mihi videar exprimere posse aequationibus, dummodo lex mihi

*) quae quidem aequationibus adhuc determinandae dantur. Praefero id nomen vulgari voci variabilium, cum haec minus generaliore vi usurpari soleat, quam quae omnibus nostris quaestionibus convenit.

**) exclusis etiam coordinatis curvis.

nota sit, quam in ea describenda secuti sint. Hoc quidem libello non nisi paucissima exempla proferam, ex quibus appareat, omnia genera, imagines puuctis vel lineis vel superficiebus compositas, ipsa corpora solida aequationibus repraesentari posse. In eisdem non nisi rectas partes lineae coordinaticiae usurpabo.

VII. Paucissima exempla hic adumbrare potero ea de re, quum methodi, quibus in majore libro aequationes facilius construere doceo, plus spatii poscant, quam ut hic exponi possint. Hic de acquationibus construendis solum hoc unum suadeo, ne negligatur ordo, quo in linea coordinaticia partes se subsequantur. Quibus conditionibus ordo negligi vel mutari possit, in majore opere expono. Si quattuor sint partes, facillime construantur ordine hoc $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{x}$, x, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y}$, y, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}$, z.

Quando puncta facile nancisci potero, quae oriuntur dum solas partes primas (h. e. initio A proximas) cum ipsorum angulis, ut $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{x}$, x construo; eorum imaginem, quam constituunt, vocabo projectionem in ($\mathfrak{W}$, $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{x}$, x): similiter atque in considerandis lineis duplicis curvaturae imaginem, quae ab altera aequatione $F_1(x, y)=o$ datur, projectionem vocant in x.y. Ut in omnibus hujus punctis tertia coordinata z secundum alteram aequationem $F_2(x, z)=o$ superstruitur; ita ego quoque, dum in unoquoque puncto illius projectionis reliquas superstruo coordinatas, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y}$, y, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}$, z, veram invenio imaginem.—Porro, ut in vulgari geometria superficierum ea pars verae imaginis, quae ad certum valorem constantem ut $x=c$ pertinet, sectio nominatur; ita ego circa omnia imaginum genera eam imaginis partem, quae eo datur, quod una indeterminata ut w uno ex permissis valoribus ut c afficitur, voco sectionem constantis $w=c$. Imaginem totam habebimus, ubi huic quantitati sensim omnes valores dati erunt, qui ab aequationibus permittentur. Similiter sectiones quoque plurium constantium, ut $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{Z}$ describi posse apparet.—Huic vocum sensui ampliori sit venia.

VIII. Systemate aequationum

$$\begin{cases}(z-\alpha y+c)\ (z-\beta y+c')=0\\ (y-a)\ (y-a-f)\ (y-a-2f)\ \ldots\ (y-a-(n-1)f)=0\end{cases}$$

si referuntur ad duas coordinatas y, z sub angulis constantibus applicandas, praebentur 2n puncta in duabus lineis rectis posita. Signum (fig. 6) adumbratur, si in utraque linea simul $y=a$, $z=e$ esse ponimus, unde $c=a\alpha-e$ $c'=a\beta-e$ sequuntur. Cum ponuntur $\beta=-\alpha$, $e=0$, $\mathfrak{z}=90^0$, hoc signum ab y axi dimidiatur.

Habeamus lineam coordinaticiam duarum partium angulorumque sint $\mathfrak{Y}=\text{cst.}$, $\mathfrak{z}=90^0$; ad hoc $\mathfrak{Z}=0$, ut linea tota nunquam ex eodem plano excedat. Ad eam relatum aequationum systema

$$\begin{cases}(z-(y-a)\alpha)(z+(y-a)\alpha)=0\quad (\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-2\pi)=0\\ (y-a)(y-a-f)(y-a-2f)\ldots(y-a-(n-1)f)=0\\ \qquad\text{dum tg}\ \frac{\pi}{r}=+\frac{(n-1)\ f\alpha}{a+(n-1)f}\end{cases}$$

tamquam stellam praebet r radiorum eamque punctis adumbratam. Sectio enim unaquaeque constantis $\mathfrak{y}$ praebet signum (fig. 6) a crure anguli $\mathfrak{y}$ dimidiatum. Si ponimus $r=5$, $n=6$, accipimus imaginem (fig. 7) descriptam, stellam quinque radiorum, in quorum singulis lateribus sex puncta sunt scripta.

IX. Si ad lineam trium partium, quarum anguli sint $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0$, $\mathfrak{x}=\text{cst.}$, $\mathfrak{z}=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{r})$, aequationes pertinent hae quattuor

$$\begin{cases}x\ (x-a)\ (x-2a)\ \ldots\ (x-(n-1)a)=0\\ y+x=0\\ \mathfrak{y}\ (\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})\ (\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-\frac{2(r-1)}{r}\pi)\ =0\\ (z-2x\ \sin\frac{\pi}{r})(z-2(x-a)\ \sin\frac{\pi}{r})\ldots(z-2a\ \sin\frac{\pi}{r})\ z=0\end{cases}$$

ab eis quodvis eorum signorum in plano describitur, quae numeris polygonalibus, qui vocantur, declarandis sunt. Ponam $n=6$, $r=5$. (fig. 8) x coordinata ad AX cum $\mathfrak{x}$

ducta, invenimus projectionem in x, h.e. sex puncta M^0,M', M'',M''',M'''',M'''''. Ad sectionem constantis x=a circa M' construendam demetiaris angulos $\mathfrak{y}=0$, $\mathfrak{y}=72$, $\mathfrak{y}=144$, $\mathfrak{y}=216$, $\mathfrak{y}=288$, quorum crus incipiens est M'M'': singulae y, quae ipsi x oppositae sint, non in cruribus angulos finientibus ipsis sed in oppositis lineis abscidendae sunt, ut perveniatur ad puncta $N_0N_{,}N_{,,}N_{,,,}N_{,,,,}$. Cum z sub $\mathfrak{z}=-54^0$ applicanda sit, in singulis autem y ab N ad M' positive eatur, z singulae ab N_0 versus $N_{,,}$ ab $N_{,}$ versus $N_{,,,}$ etc. abscidendae sunt. Ut autem nunc sectio constantis x=a scribenda est; ita aequatio quarta, quae in z—o finiri debet, solis duobus factoribus $(z-2a \sin\frac{\pi}{r})(z-0)=0$ constat: qua de causa duo puncta O, quae ad $\mathfrak{y}=0$ pertinent, super N_0 et $N_{,}$ cadunt; duo quae ad $\mathfrak{y}=72$ pertinent, super $N_{,}$ et N'', . . . polygonumque regulare quinqne laterum datur, in quibus singulis ut in $N_0N_{,}$ bina puncta conscripta sunt (duplicia quidem).

Inter sectionem constantis x=2a construendam circa M'' ad crus angulos incipiens M''M''' similiter anguli iidem applicantur, tamen y=—x=—2a absciditur. Ad z circumscribendam quarta aequatio jam tres factores exhibet

$$(z-4a \sin\frac{\pi}{r})(z-2a \sin\frac{\pi}{r})(z-0)=0$$

ut in lineis z, quae super N^0N', $N'N''$ cadunt, terna puncta abscidantur, in N^0N' ipsa N_0, $N_{,,}N'$: unde novum pentagonum constituitur duplo majorum laterum, in quibus singulis terna puncta invenies, ut N_0,$N_{,,}$$N'$.— Dum similiter sectio constantis x=3a circa M''' construitur, z quattuor valores nanciscitur, cum quarta aequatio fiat

$$(z-6a \sin\frac{\pi}{r})(z-4a \sin\frac{\pi}{r})(z-2a \sin\frac{\pi}{r})z=0$$

ut ad sectionem hanc pertineant quindecim puncta, cum in singulis lateribus novi pentagoni quaterna puncta conscripta sint. Similiter aliae sectiones constantes construentur. Polygonum, quod ad sectionem x=o pertinet, in unum punctum N_0 coalescit, quippe cum y=z=x=o fiant. Jam

tota imago, si in aequatione prima usque ad n=6 pergitur, punctis constat $\frac{n(3n-1)}{1.\ 2.}=51$ vel sex polygonis, quorum vertex A sive M_0 sive N_0 communis est omnibus. Non aliter ab his quidem aequationibus, si r=3, repraesentabuntur numeri triangulares; tetrangulares, si r=4: numerus cujusque seriei primus, cum n=1; secundus cum n=2; tertius, cum n 3 aequat; caeteri similiter.

X. Imagines, quibus numeri pyramidales, quos dicunt, repraesentantur, dantur ab aequationibus

$$\begin{cases} w\ (w-a)\ (w-2a)\ \ldots\ (w-(n-1)a)=0 \\ (x-w)\ (x-(w-a))\ (x-(w-2a))\ \ldots\ (x-2a)(x-a)x=0 \\ y+x=0 \\ \mathfrak{y}\,(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})\,(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-\frac{2(r-1)\pi}{r})=0 \\ (z-2x\sin\frac{\pi}{r})(z-2(x-a)\sin\frac{\pi}{r})\ldots(z-2a\sin\frac{\pi}{r})\ z=0\,, \end{cases}$$

si lineam coordinaticiam quattuor partium w, x, y, z, sumis, quorum anguli constantes sunt, excepta $\mathfrak{y}$, ad hoc $o=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{r})$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{X}$ constantes at non evanescentes.

Singulae sectiones constantis w eodem plano continentur, omniaque haec plana inter se parallela sunt aequalibusque intervallis separata. Aequatio secunda, quae in x—o=o finiri debeat, ad sectionem constantis w=o unum factorem, ad sectionem w=a duos, ad sectionem constantis w=2a tres factores praebet. Ex exemplo, quod antecedit, apparet, sectionem constantis w=o esse unicum punctum, sectionem constantis w=a secundam imaginem polygonalem, ut ita dicam, sectionem w=2a tertiam illarum imaginum, constantis w=3a quartam. Cum posita n=4 hae quattuor sectiones simul cogitandae sint, en tamquam pyramidem solidam punctis adumbratam, cujus basis polygonum r laterum est.

XI. Si ad lineam coordinaticiam trium partium sub angulis constantibus adjunctarum, quorum $\mathfrak{r}=o$, $\mathfrak{y}=90°$, refers aequationum duarum systema

$$\overset{x}{\{z-cz=o \quad y^2+x^2-b^2=o\}}$$

projectio in y et x erit linea circularis BNQ. (fig. 9) In ejus unoquoque puncto N ad certam abscissam AP=x pertinenti z erigenda est sub suis angulis, c$\underline{^{ies}}$ major, quam illa abscissa. Si per P ducimus ad AX sub eisdem angulis $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$*), PP'=c.AP et per N huic parallelam et aequalem NO, O punctum quaesitae imaginis erit. Cum omnes hujusmodi lineae pp' cum PP' parallelae = c. Ap sint, cernitur, nostram imaginem eandem esse, quae oriatur, si ordinatae, quae ad lineam AS pertinent, sua positione exstruantur super extremitatibus ordinatarum, quae in circulari respondent, h. e. acsi linea recta z=cx super circularem $y^2=b^2-x^2$ superstruatur. — Si sumimus AP' =x', OP'=y', atque ubi per Q ducta est QQ' parallela cum PP', si AQ', quae est constans, =a ponimus, habemus x:x'=b:a, unde ob $x=\frac{b.\,x'}{a}$ et y=y' ex $y^2=b^2-x^2$ oritur $y'^2=b^2-\frac{b^2x'^2}{a^2}$ pro quaesitae imaginis aequatione vel

$$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1,$$

aequatio ellipsis lineae inter coordinatas obliquangulas x' y' expressae, pro qua ex forma ipsa aequationis concluditur b et a esse dimidias diametros conjugatas. Itaque ellipsis exprimi potest duabus his aequationibus z=cx, $y^2+x^2-b^2=o$ inter ternas coordinatas.**)

XII. Eaedem aequationes construi possunt ellipsimque dant, sive omnes tres lineae coordinaticiae partes per idem planum vergunt, sive non. Illud in linea trium partium fit, cum angulorum sunt $\mathfrak{Y}$=o $\mathfrak{Z}$=o, si quidem alterius generis sunt; cum $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}$, si prioris generis angulos habes.

Adeo nihil impedit, quominus linea coordinaticia ei

*) si quidem anguli prioris generis sumuntur. (cf. cap. III.)

**) Eisdem aequationibus via praebetur, ellipsim ex dimidiis diametris conjugatis a et b et angulo incluso α facillime construendi.

quoque conditioni subjiciatur, ut tota teneatur eadem linea recta; cui satisfacit linea trium partium, dum non solum $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0$, sed etiam $\mathfrak{y}=0$, $\mathfrak{z}=0$, si quidem anguli alterius sunt generis: ut habeas $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}=\mathfrak{x}$ opus est, si anguli prioris generis sumuntur. Quo facilius ostendam, quae imago hac conditione praebeatur, notam illam disquiram ellipsis aequationem

$$\frac{z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0$$

Quamquam evanescentibus $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{z}$ omnia ejus puncta eadem linea recta continentur, tamen pro aequationis imagine linea infinitae longitudinis habenda non est. Punctorum enim distantia ab A, quae exprimitur a summa $y+z=X$ infinita reddi nequit. Nam si introducimus X in aequationem datam, substituenda $z=X-y$, habemus

$$(\mathfrak{F})\qquad y^2-2y\,X\,\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(b^2-X^2)}{a^2+b^2}$$

sive

$$y=\frac{a^2X\pm ab\sqrt{(a^2+b^2-X^2)}}{a^2+b^2}$$

unde cernitur, nunquam esse $X^2>a^2+b^2$; quae enim summa si a X^2 superaretur, y imaginaria fieret. Linea igitur non existit, nisi dum $X^2\overline{\gtrless}a^2+b^2$. Quamquam autem linea finita ab aequatione datur, tamen lex continuitatis, quam vocant, nequaquam negligitur. Dum valorum permissorum aliquem huic X tribuis, y similiterque z duplices valores nanciscuntur, ut duplici ratione ad unumquodque imaginis punctum perveniri possit: h. e. imago dupliciter descripta est, ellipsis quodammodo compressa est, ut uterque ramus in eandem lineam incidat. Ea autem puncta non sunt duplicia, pro quibus valores y et z aequales praebentur, id quod fit, antequam imaginarii fiunt h. e. si $a^2+b^2-X^2=0$.

Ubi igitur linea ad haec puncta pervenit, per sua ipsius vestigia regreditur, ita ut extremitates sint nostrae imaginis. Eorum coordinatae inveniuntur, si quantitas

quae sub radicis paris signo subest, evanescens redditur: in hoc exemplo habes

$X = \pm\sqrt{(a^2+b^2)}$, unde $y = \pm\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$, $z = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}$

sequuntur. Ut, si aequatio $\mathfrak{F}$ non facile solvi potest, conditio, qua radices y (vel z) aequales prabentur, differentiando elici solet; ita haec quoque puncta ultima exprimi possunt duabus aequationibus

$$\mathfrak{F}(X, y) = o \text{ cum } \left(\frac{d\mathfrak{F}(X, y)}{dy}\right) = o$$

$$\text{vel } \mathfrak{F}(X, z) = o \text{ cum } \left(\frac{d\mathfrak{F}(X, z)}{dz}\right) = o$$

XIII. Consideremus adhuc, quae imago, eadem conditione interposita, repraesentetur ab aequatione

$$z^3 - 6az^2 + 3zy^2 + 9a^2z - 4a^3 = o$$

Substituta $y = X - z$ aequatio $\mathfrak{F}$ datur

$$z^3 - \tfrac{3}{2}(a+X)z^2 + \tfrac{3}{4}z(X^2+3a^2) - a^3 = o$$

Cum aequatio tertii sit ordinis, z semper realis reddi potest, quicunque datur constans valor X. Itaque cum nullum punctum lineae infinitae ab aequatione excludatur, totam lineam infinitam ad nostram imaginem pertinere cernitur. Nihilominus aequationes $\mathfrak{F} = o$ et $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\right) = o$, qui sunt

$$4z^3 - 6(X+a)z^2 + 3z(X^2+3a^2) - 4a^3 = o \text{ et}$$
$$4z^2 - 4(a+X)z + X^2 + 3a^2 = o$$

proferunt $(X-a)^3 \mp 4a(X-a)\sqrt{(X-a)}\sqrt{2a} = o$

cujus radices $X = a$ et $X = a + 2a.4^{\frac{1}{3}}$ utrique aequationi et $\mathfrak{F} = o$ et $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\right) = o$ satisfaciunt. Non difficile ostendi potest, quid hae radices velint. Dantur eaedem ab aequatione $\mathfrak{F}$, etiamsi nullam differentiationem adhibes. Secundo ejus termino remoto habemus $z'^3 - 3a\left(\frac{X-a}{2}\right)z' + \left(\frac{X-a}{2}\right)^3 = o$.

Si X constante quaeritur, qui valor z ad eundem constantem valorem pertineat, non semper singuli, sed interdum terni quoque valores z praebentur, atque id quidem dum

q negativa est et $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$ h. e. intra $X=a$ et $X=a+2a.4^{\frac{1}{3}}$ Quamquam igitur haec linea infinitita sit, tamen interna quadam proprietate excellit: quaedam ejus pars, cui longitudo $= 2a.4^{\frac{1}{3}}$, tripliciter descripta videtur, dum aliae partes omnes simplices sunt. Ut aequationes $\mathfrak{F}=o$ cum $(\frac{d\mathfrak{F}}{dz})=o$ radices aequales ipsius z quaerunt, ita extremitates partis triplicis indicant: antequam enim duae radices z imaginariae redduntur, aequales se praebent.

XIV. Eadem ratione circa lineam coordinaticiam curvarum partium versantes, partem aliquam finitam lineae cujusvis curvae aequationibus representare possimus. Attamen idem facilius alia ratione consequimur introducenda quantitate indeterminata, quae a nulla coordinata repraesentetur, tamen nullos nisi reales valores admittat.

Habeamus ad lineam coordinaticiam duarum partium sub angulis constantibus applicatarum referendas aequationes

$$\left\{ y=\sqrt{(a^2-\xi^2)} \quad z=b\sqrt{(\xi^2+4a^2)} \right\}$$

in quibus ξ quantitas indeterminata non repraesentata omnibus valoribus realibus afficienda est, qui intra $+a$ et $-a$ continentur, non pluribus. Dum ξ ab $-a$ usque ad o crescit, abcissa y valores, qui ab o usque ad $\pm a$ sunt, percurrit, h. e. ab A (fig. 10) usque P′ et simul ab A usque ad P″: z valores, qui sunt ab $\pm ba\sqrt{5}$ usque ad $\pm 2ab$, h. e. quattuor partes lineae curvae simul describuntur, a B′ usque C′ et a B, usque C, atque a B′ usque C″ et a B, usque C,,. Dum ξ ab o usque ad $+a$ crescit, abscissa y eosdem valores ordine immutato nanciscitur, ab $\pm a$ usque ad o, a P usque A, similiter z ab $\pm 2ab$ usque $\pm ba\sqrt{5}$, ut eaedem curvae partes iterum describantur, a C ad B. Itaque duo arcus curvi soli C′C″ et C,C,, aequationibus satisfaciunt. —

Eaedem commodius repraesentantur his, in quibus ξ ex altera eliminavimus

$$\left\{ \frac{z^2}{b^2} + y^2 = 5a^2 \quad \xi = \sqrt{(a^2 - y^2)} \right\}$$ e quarum

priore cernimus arcus esse ellipticos; ex altera, non totam ellipsim esse sumendam, modo eam partem, cujus coordinatae ipsam ξ non imaginariam reddant, h. e. cujus abscissae intra valores $+a$ et $-a$ teneantur.

Eo quod arcus dupliciter describuntur, legi continuitatis satisfieri apparet.

Ne dicas, ejusmodi aequationes et imagines ineptas esse. In disciplina physica, in primis in mechanica non modo aequationes ejusmodi sed etiam imagines occurrunt, vel saltem comparari possunt. Ex. gr. perpendiculum, cujus positio parvo quodam pulsu mutata est, lineam curvam describit, at non totam, cum ejus motus ab illo pulsu dependeat, atque certa parte percursa regreditur. Illa quoque ellipsis compressa, quam supra investigavimus, ad hanc rem pertinet, cum proprie duabus aequationibus repraesentetur

$$\left\{ Y - \operatorname{tg} x . X = o, \text{ et } y^2 - 2yX \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2(b^2 - X^2)}{a^2+b^2} \right\}$$

(si quidem $\mathfrak{X} = o$), quantitasque y, quae non amplius ad lineam coordinaticiam pertinet (haec enim jam constat solis duabus partibus sibi normalibus X et Y), pro non repraesentata habenda est.

XV. Hac ratione facile imagines ex finitis partibus linearum rectarum vel curvarum compositas aequationibus possunt circumscribi. — Aequationes

$$(z - (y-a)\alpha - e)(z - (y-a)\beta - e) = o \quad \xi = \sqrt{[(y-a)(a+b-y)]}$$

describi jubent signum illud (fig. 6) lineis ipsis. Cum enim ξ imaginaria reddi non debeat, y omnes valores reales, qui sunt ab a usque ad $a+b$, accipere potest, sed nullos alios.

Et ipsa stella, quam supra (fig. 7) punctis consignavimus, a lineis ipsis efficitur, si aequationes sumimus

$$(\mathfrak{y} - \frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y} - \frac{4\pi}{r}) \ldots (\mathfrak{y} - 2\pi) = o . (z - (y-a)\alpha)(z + (y-a)\alpha) = o$$

$$\mathfrak{x}=\sqrt{[(y-a)(a+b-y)]}$$
$$\text{cum } \operatorname{tg}\frac{\pi}{r}=\frac{b\alpha}{a+b},\ \mathfrak{Z}=0$$

Polygonum regulare r laterum datur ab aequationibus

$$\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{y}\left(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r}\right)\left(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r}\right)\ldots\left(\mathfrak{y}-\frac{2(r-1)}{r}\pi\right)=0\\ \mathfrak{x}=\sqrt{[z(2y\cos(\pi-\mathfrak{z})-z)]}\end{array}\right\}$$

dum omnes alii anguli constantes sunt, inter eos $\mathfrak{Z}=0$, $\mathfrak{z}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{r}$, nec non $y=\text{const.}$

XVI. Solo uno exemplo monstrabo, quam faciles superficies dentur, si anguli quoque variantes sumuntur. Disquiram aequationem

$$a^2\mathfrak{Z}^2z^2+b^2y^2-1=0$$

si $\mathfrak{z}=90^0$, $\mathfrak{y}=0$, $\mathfrak{Y}=0$; z, y, $\mathfrak{Z}$ variant.

Sectio constantis $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}'$ lineam dat ellipsim, cujus altera semiaxis $=\frac{1}{b}$ semper eadem est, altera semiaxis $=\frac{1}{a\mathfrak{Z}'}$ crescit, quo magis angulus $\mathfrak{Z}$ diminuitur.

Sectio constantis $y=y'$ dat duas spirales hyperbolicas, cujus asymptotae lineae distantiis $=\frac{\pm\sqrt{(1-b^2y'^2)}}{a}$ ab initio A remotae atque parallelae sunt. Hae distantiae eo majores sunt, quo minor abscissa y sumitur, maximae atque $=\frac{\pm 1}{a}$, si $y=0$; minimae atque evanescentes, dum, si $y=\frac{\pm 1}{b}$, totae spirales in eandem infinitam lineam rectam transeunt cumque asymptotis coalescunt.

Omnes hae asymptotae, ut ab aequatione $d=\frac{\pm\sqrt{(1-b^2y'^2)}}{a}$ repraesentantur, in qua y' et d pro coordinatis normalibus haberi possunt, ita superficiem cylindricam basi ellipsi constituunt, quae ipsa asymptota est universae datae aequationis superficiei.

Aliam superficiem supra (cap III) tribus aequationibus

$$\left\{ xw - a^2 = o, \ \cot g(\mathfrak{y} + c'') - \frac{x}{w} = o, \ y^2 + z^2 = \frac{w^2}{b^2} \right\}$$

in quinque coordinatis x, w, $\mathfrak{y}$, y, z expressimus.

XVII. Si nulli angulorum $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{W}$ variant, eis valoribus interdum possunt affici, ut omnes lineae coordinaticiae partes semper eodem plano contineantur.

Sit data aequatio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
hacque conditione investiganda, dum ad hoc $\mathfrak{x} = o$, $\mathfrak{z} = 90^0$ majoris simplicitatis causa ponuntur. Sectiones constantis $y = y'$ ellipses sunt, sectiones constantis $x = x'$ lineae circulares. Omnium illarum ellipsium tamquam summa totam efficit imaginem, item omnium harum linearum circularium. Si aequationem in vulgares X, Y normales permutare vis, utendum est formulis

$$Y = y \sin \mathfrak{y} + z \cos \mathfrak{y} \quad X = x + y \cos \mathfrak{y} - z \sin \mathfrak{y}$$

quantitatumque x, y, z duae quaelibet eliminandae sunt.

Accipimus y et z eliminatis

$$Y^2 + (X - x)^2 = 1 - x^2$$

Ex eo, quod in hac aequatione x adhuc inest, cernitur, hujusmodi quaestiones non solarum X, Y aequatione exprimi posse. Una ex indeterminatis x restat, quae non amplius ad lineam coordinaticiam pertinet (nempe ad lineam duarum partium X et Y) eaque de re in eis indeterminatis numeranda est, quae a coordinatis non repraesentantur. Sectio constantis x linea circularis est, cujus centrum in axi abscissarum ad distantiam x locatum, quaeque ipsa radio variabili $\sqrt{(1 - x^2)}$ descripta est.

Cum quaeritur, in qua harum sectionum certum quoddam punctum constantibus X et Y datum sit positum, cernitur ex $x = \frac{X \pm \sqrt{(2 - X^2 - 2Y^2)}}{2}$, pro constantibus X,Y in universum duas radices x praeberi, quodque igitur punctum esse in duabus sectionibus h. e. dupliciter esse descriptum, saltem dum $2 - X^2 - 2Y^2 > o$ sit. Sin $2 - X^2 - 2Y^2 < o$, ad nullam sectionem pertinet illud punctum datum h.e. ab aequationis datae imagine excluditur, quae igitur totum

infinitum planum minime comprehendit. Conditione $2Y^2+X^2-2=o$ ea puncta exhibentur, quibus puncta realia ab imaginariis vel ab exclusis separantur, h. e. linea ellipsis semiaxibus 1 et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ praedita, qua nostra imago includitur. In eadem nanciscitur x, antequam ex realibus valoribus ad imaginarios transit, radices aequales, h. e. singula ejus puncta non in binis sed in singulis sectionibus posita sunt. — Habemus igitur imaginem finita parte dati plani comprehensam; tamen quae interna quadam proprietate (duplici vigore) a planis vulgaribus aequationis $Ax+By+Cz+D=o$ excellat. Linea, qua eadem finitur, sola est simplici vigore. Quod autem duplex est superficies, eo servatur lex continuitatis atque imago pro ellipsoide superficie in unum planum compressa haberi potest.

XVIII. Consideremus generalem aequationem ellipsoidis $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=o$

eadem conditione, ut $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=o$. Sectiones constantis $x=x'$ statim apparet, ellipses esse semiaxibus praeditas $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)}$ et $\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)}$; similiter sectiones constantis y, nec non sectiones constantis z. Aequatio in normales X, Y permutatur auxilio formularum

$$Y=x\sin\mathfrak{x}+y\sin(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+z\sin(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$$
$$X=x\cos\mathfrak{x}+y\cos(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+z\cos(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$$

atque si $\mathfrak{x}=o$ ponitur et y cum z eliminantur, aequatio permutata est

$$(X-x)^2a^2(c^2\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+b^2\sin^2\mathfrak{y})$$
$$-2Y(X-x)a^2(c^2\sin(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})\cos(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})+b^2\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y})$$
$$+Y^2a^2(c^2\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+b^2\cos^2\mathfrak{y})=(a^2-x^2)b^2c^2\sin^2\mathfrak{z}$$

Superficiem iterum duplicis vigoris esse, ex eo cernitur, quod aequatio pro x secundi est ordinis. Si conditionem quaerimus, qua ejus valores ex realibus in imaginarios transeant, h. e. lineam includentem, quae simplicis vigoris est, invenitur

$$X^2(b^2\sin^2\mathfrak{y}+c^2\sin^2(\mathfrak{z}+\mathfrak{y}))+Y^2(a^2+b^2\cos^2\mathfrak{y}+c^2\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}))$$
$$-2XY(b^2\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}+c^2\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}))=$$

$$=a^2c^2\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+a^2b^2\sin^2\mathfrak{y}+b^2c^2\sin^2\mathfrak{z}$$

Si redditur $a=b=c$, $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}=120$, proficiscitur

$$X^2+Y^2=\tfrac{3}{2}\,a^2$$

Ecce inventam habemus aequationem circuli, h. e. plani a linea circulari inclusi, quae est $x^2+y^2+z^2=a^2$, si ad tres coordinatas sub angulis $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=0$, $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}=60^0$ vel$=120^0$ inclinantes refertur.

XIX Imaginis hae redditae sunt finitae ea de re, quod quantitas indeterminata non repraesentata, quae in aequationibus permutatis restabat, secundae erat dignitatis, itaque pro quadam tantum conditione reddebatur realis. Sequitur, non omnes hujusmodi planas imagines finitas fore: ex. gr. si x tertiae sit dignitatis, nulli dari possunt valores X et Y, pro quibus x prorsus sit imaginaria. Nihilominus ne hae quidem imagines omni ex parte cum plano simplici vulgaris geometriae congruunt. Ut enim conditio quaedam affertur, cui si X et Y satisfaciunt, tres valores reales ipsius x praebentur; ita pars imaginis triplici vigore est. Cum indeterminata non repraesentata quartae erit dignitatis, imago fortasse finita erit. Fiet enim, ut quaedam plani pars quadruplici sit vigore, quaedam duplici, quaedam imaginaria h. e. a quaesita imagine excludatur. Ne in exemplo nimium spatii calculis impendi opus sit, aequationem ejus generis contemplabor, ut una coordinata, quae ad systema pertineat variabilisque sit, tamen in aequatione non insit, a nulla indeterminata repraesentetur. Aequatio $z^3-6az^2+3zy^2+9a^2z-4a^3=o$ pertineat ad lineam coordinaticiam quattuor partium, quarum varient z, y et x, constans sit $w=-a$ cum angulis $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=o$, $\mathfrak{z}=90^0$, $\mathfrak{y}=-45^0$, $\mathfrak{x}=-45^0$, $\mathfrak{w}=+45^0$ (fig. 11) Ad permutandas aequationes habebimus

$$Y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(z-y-a)\qquad X=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(z+y-a)+x$$

unde proficiscuntur

$$z=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(X-x)+(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.Y+a)\qquad y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{a}(Y-(X-x))$$

quibus in aequationem datam substitutis, haec transducitur ad $(X-x)^3-3a\sqrt{2}(X-x)Y+Y^3=o$ $\quad(\mathfrak{F})$

Sectio constantis $x=o$ dat curvam lineam bene notam

$$X^3 - 3a\sqrt{2}.XY + Y^3 = 0$$

Quaeque alia sectio constantis x cum hac congruit, tamen circa punctum distantia x ab A remotum tamquam circa initium construitur. Tota datae aequationis imago omnibus his sectionibus composita est, quas nanciscimur, dum x sensim omnibus valoribus realibus, qui cogitari possunt, afficitur.

Jam cernitur, quae pars imaginis triplex sit. Ut ejus fines inveniamus, quaerendum est, quibus conditionibus x duos reales amittat valores h. e. duas aequales nanciscatur radices. Id saepe solvenda aequatione $\mathfrak{F}$ invenire possumus, dum quantitates, quae sub signo radicis quadratae (in universum paris) subsunt, evanescentes facimus. Saepius huic methodo, parum sufficienti, cum de aequationibus solvendis dependeat, altera ratio calculo differentiali nixa praeferenda est, ut quaeratur, qua conditione aequationes

$$\mathfrak{F}\,(x, X, Y) = 0 \text{ et } \left(\frac{d\mathfrak{F}(x,X,Y,)}{dx}\right) = 0$$

simul evanescant.

Invenimus $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\right) = (X - x)^2 - a\sqrt{2}.Y = 0$ atque

$X - x = (a\sqrt{2}.Y)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{F} = 0$ substituendo $Y^6 - 8a^3\sqrt{2}.Y^3 = 0$

unde radices $Y = 0$ et $Y = 2a.2^{\frac{1}{6}}$ proficiscuntur.

Duae igitur lineae rectae, quarum altera cum AX parallela, altera AX ipsa est, triplicem partem imaginis a simplici separant.

XX. Dicere licet, omnes hujus generis imagines tamquam movenda sectione constantis x (vel alius constantis) oriri: hancque modo ita moveri, ut ejus forma inter movendum nihil mutetur, siquidem indeterminata x in data aequatione non inest; modo ut ejus forma inter movendum variet, si x in aequatione inest. In nostrorum exemplorum ultimo initium sectionis $z^3 - 6az^2 + 3zy^2 + 9a^2z - 4a^3 = 0$ per lineam rectam x infinitam ductum est, in primo sectio circularis $y^2 + z^2 = 1 - x'^2$ movebatur, ita quidem, ut radius semper ordinatam normalem aequaret, quae in circulo fixo radii $= 1$ ad positionem centri circularis motae pertinebat.

(Facilius eadem ex aequationibus permutatis sectionum constantium, ex $X^3 - 3a\sqrt{2}.XY + Y^3 = 0$ et $Y^2 + (X - x)^2 = 1 - x^2$ elucent.)

Jam modo quaesita quaeque imago plana omnium sectionum summa constat, tamquam a via vel vestigiis, ut ita dicam, lineae motae efficitur: lineae autem, quae aqualis vigoris partes includunt, eaedem sunt, quas in geometria vulgari curvas finientes (Grenz-Kurven) vocant, quaeque solutionibus aequationum differentialium singularibus respondent. Ex eis autem, quae capite proximo explicuimus, sequitur, minime semper lineas motas ab iisdem includi, nunquam nisi in aequatione, quae integralis particularis*) vocatur, quantitas constans, quam differentiandi causa variantem facimus, secundae dignitatis est. Proprie enim systemate aequationum $\left\{ \mathfrak{F} = 0 \quad \left(\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\right) = 0 \right\}$ omnia puncta continentur, ad quae quantitatis x binae radices aequales pertinent. Saepius quoque fieri, ut ne partes quidem varii vigoris ab iis separentur, ostendam in majore meo libro, in quo ex accuratiore harum imaginum disquisitione proficiscetur, omnes lineas punctaque, quae ab hoc systemate circumscribantur, ad singularia earum loca pertinere. Nec non in eodem ad aliam has lineas inveniendi rationem perveniemus, quae, ut differentiandis aequationibus datis, non permutatis, posita sit, ita sit brevior, facilior, utilior.

Hac nova geometriae parte imagines planae varia intensitate (sit venia verbo) comparatae esse videntur: tales quales in rerum natura praebentur a planis illustratis, ab umbra in plano excepta, ab imaginibus camerae obscurae corporumque a quodam speculo receptorum, ab aliis varii generis. Harum imaginum eae, quae a luce illustratae sunt, hic majore, illic minore luce fulgent atque, dum ab alia parte ad aliam transis finitimam, lux aut crescit vel decrescit minimis incrementis, aut certae lineae sunt, ubi subito augeatur vel diminuatur. Talis quidem vigoris su-

*) Sequor ill. Laplaceum.

bita variatio, quomodo analytice exprimatur, ex eis, quae exposui, apparet. Quod vero ad alterum variandi genus pertinet, quomodo ab analysi repraesentetur, in majore meo libro spero fore ut vos certiores faeere possim.

XXI. Transimus ad perlustrandam aequationem unam quattuor variabilium.

$$z^2+y^2+x^2+w^2=a^2$$

In hoc quidem exemplo sumantur anguli **prioris** generis (cf. cap. III) atque ii quidem constantes $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}=\mathfrak{X}=0$, $\sin\mathfrak{x}=\sin\mathfrak{y}=\sin\mathfrak{z}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\mathfrak{Y}=120^0$, $\mathfrak{Z}=-120^0$, ut si per initium A axes cum singulis coordinatis paralleli ponuntur, in hos vertices regularis tetraedri incidere possint. Sectiones constantis unius variabilis ut $w=w'$ superficies sunt ellipsoides semiaxium aequalium $=\sqrt{(1-w'^2)}$. Ad aequationem in normales X, Y, Z permutandas habemus

$$Z=z\sin\mathfrak{z}\sin\mathfrak{Z}+y\sin\mathfrak{y}\sin\mathfrak{Y}+x\sin\mathfrak{x}\sin\mathfrak{X}+w\sin\mathfrak{w}\sin\mathfrak{W}$$
$$Y=z\sin\mathfrak{z}\cos\mathfrak{Z}+y\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{Y}+x\sin\mathfrak{x}\cos\mathfrak{X}+w\sin w\cos\mathfrak{W}$$
$$X=z\cos\mathfrak{z}+y\cos\mathfrak{y}+x\cos\mathfrak{x}+\mathfrak{w}\cos\mathfrak{w}$$

in nostro exemplo $Z=\frac{1}{3}\sqrt{6}.(y-z)$

$$Y=-\tfrac{1}{3}\sqrt{2}(y+z)+\tfrac{2}{3}\sqrt{2}.x \qquad X=\tfrac{1}{3}(z+y+x)+w$$

unde proficiscuntur ad eliminandas z, y, w

$$z=-\frac{(Z+\sqrt{3}.Y)\sqrt{6}}{4}+x, \quad y=\frac{(Z-\sqrt{3}.Y)\sqrt{6}}{4}+x$$
$$w=X-x+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.Y.$$

quibus in aequationem datam substitutis, praebetur

$$x^2-x(\frac{X}{2}+\sqrt{2}.Y)+\frac{X^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}XY+\frac{11}{16}Y^2+\frac{3}{16}Z^2-\frac{a^2}{4}=o.$$

quae aequatio, constante x, ellipsoidis est superficiei. Atque in hoc quoque exemplo ex eo, quod x secundae dignitatis est, quodque imaginis quaesitae punctum a constantibus X, Y, Z datum in duabus sectionibus constantis x inesse sequitur, dum quidem haec ipsa x neque aequales nanciscitur radices neque imaginaria fit. Realia autem puncta continentur superficie, quae invenitur, dum aequationem permutatam pro x solvis quantitatemque radicis quadratae evanescentem esse ponis.

Invenimus $X^2+Y^2+Z^2=\frac{4}{3}a^2$

h. e. superficiem sphaericam radii$=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$. Totus igitur locus geometricus datae aequationis a sphaera solida constituitur h. e. coordinatae X, Y, Z cujusque puncti ad sphaeram solidam pertinentis satisfaciunt nostrae aequationi.

Ex eis, quae supra exposui, colligi licet, corpora finita non praeberi, nisi ea datarum quantitatum indeterminatarum, quae in aequatione permutata restat, paris sit dignitatis; nec non, si ejusdem dignitas secundam superet, superficies dari, quae corpus in plures partes separent, quae varii vigoris sint. Eadem vigoris varietate varia densitas, quam circa varias corporum partes experti sumus, quodammodo representari videtur: ea~~m~~ autem sola~~m~~, quae subito variat. Quae cogitationes mihi occurrerint ad alterum genus densitatis exprimendum, si sensim ea descrescit, eas in majore libro invenies.

XXII. Simpliciores etiam circuli sphaeraeque aequationes comparari possunt, abhibenda quantitate indeterminata, quae nulli coordinatae repraesentanda datur.

Si aequationem $\mathfrak{x}=\sqrt{[z(a-z)]}$, dum $\mathfrak{x}$ non repraesentatur, ad lineam coordinaticiam simplicem referimus, constante solo angulo $\mathfrak{Z}$; unaquaeque sectio constantis $\mathfrak{z}$ a linea recta finitae longitudinis a ab A incipienti efficitur.

Quae quum variante angulo $\mathfrak{z}$, cui omnes valores reales dandi sunt, qui cogitari possunt, tamquam circa A moveatur, circulum describit.

Si $\mathfrak{Z}$ quoque varians ponitur, totam sphaeram habes, solidam quidem, non superficiem.

Si ad aequationes polygoni regularis r laterum, dum y quoque variantem facimus, tertiam aequationem addimus, ut habeamus

$$\begin{cases}(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-2\pi)=0\\ \mathfrak{x}_{,}=\sqrt{[y(b-y)]}\quad \mathfrak{x}_{,,}=\sqrt{[z(2y\ \sin\frac{\pi}{2}-z)]}\end{cases}$$

dum anguli alterius generis $\mathfrak{Y}=cst$, $\mathfrak{Z}=0, \mathfrak{z}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{r}$;

a quaque sectione constantis $y=y'$ iterum ut supra polygonum regulare r laterum datur, cujus vertices quantitate y' ab A absunt. Similiter omnes aliae sectiones constantis y polygona sunt: earum maxima sectio constantis $y=b$ est, cujus vertices quantitate b ab A absunt. Jam totam imaginis significationem ea plani parte, quae ab hac maxima sectione includitur, expleri cernitur.

Aequationes
$$\left.\begin{array}{l} \xi_{,}=\sqrt{[x(a-x)]} \\ (\mathfrak{Y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{Y}-\frac{4\pi}{r})\ \dots\ (\mathfrak{Y}-2\pi)=0 \\ \xi_{,,}=\sqrt{[y(x\,tg\,\alpha-y)]}\quad \xi_{,,,}=\sqrt{[z(2y\sin\frac{\pi}{r}-z)]} \end{array}\right\}$$

dum r et $\mathfrak{X}$ constantes sunt, $\mathfrak{y}=90^0$, $\mathfrak{Z}=0$, $\mathfrak{z}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{r}$,

dumque variant x, y, z, $\mathfrak{Y}$, $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, $\xi_{,,,}$

dant pyramidem rectam solidam, cujus basis polygonum regulare r laterum est, cujus lineae laterariae ad axem angulum α constituunt. — Unaquaeque enim sectio constantis $x=x'$ dat planum ad axem x normale a polygono regulari r laterum inclusum. Omnium maxima datur ab $x=a$, omnium minima sectio, quae unico puncto A constat, ab $x=0$.

XXIII. Nihil impedit, quominus aequatio quattuor variabilium, ut ea, qua sphaera solida repraesentabatur, in plano quoque construatur, h. e. ad lineam coordinaticiam referatur ex eodem plano non excedentem. Neque illam ipsam aequationem construam, angulis non mutatis: sed, quum colligendum sit, fore ut circulus ipse detur ab aequatione

$w^2+x^2+y^2+z^2=a^2$, si anguli coordinatarum

$=\frac{\pi}{4}$ vel $=\frac{2\pi}{4}$ sumantur; disquirum, num vera sit haec exspectatio. Sumam igitur lineam coordinaticiam quattuor partium, quarum anguli ex secundo genere sint atque $\mathfrak{w}=0$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^0$. Ad permutandas coordinatas normales habemus $X=w-y$ $Y=x-z$

unde substituendis duabus y et z oritur

$(Y-x)^2+(X-w)^2=a^2-x^2-w^2$

quae mutari potest in

$$(w-\frac{X}{2})^2+(x-\frac{Y}{2})^2=\frac{2a^2-X^2-Y^2}{4}$$

Itaque si quis quaerit, qui valores x. w opus sint, ut ad punctum O perveniatur, cui certi constantes valores X, Y conveniant; respondendum est, omnes combinationes ipsarum x et w, quae tamquam coordinatae sint lineae circularis radio $\frac{\sqrt{(2a^2-X^2-Y^2)}}{2}$ circa punctum $(\frac{X}{2}.\frac{Y}{2})$ descriptae. Quarum combinationum quum infinita multitudo existat, tota plani pars, quae radium realem reddit, h.e. conditioni $2a^2-X^2-Y^2>o$ satisfacit, infiniti vigoris est. Dum vero $2a^2-X^2-Y^2<o$ est, radius imaginarius redditur, h. e. nulli valores x. w dari possunt, qui ad punctum (X. Y) perducant. Imago igitur aquationis finitur a linea circulari

$$X^2+Y^2-2a^2=o.$$

Eadem linea non infiniti, sed semplicis vigoris est, cum lineae circulares, quae respondentes valores x, w determinant, radiis evanescentibus cum centris ipsis coalescant.

Accuratius imaginis rationem intelligemus, usi methodo hac. Ex aequatione

$$(Y-x)^2+(X-w)^2=a^2-x^2-w^2. \qquad (\mathfrak{F}.)$$

sequitur, sectionem quamque constantium x et w lineam circularem esse circa punctum x. w descriptam adhibito radio variabili $=(a^2-x^2-w^2)$. Ponamus initio w constantem$=w'$, demusque soli x omnes valores, qui ab aequatione permittantur. Nanciscimur infinitam multitudinem linearum circularium, quarum centra sunt in linea recta axem w normaliter intersecanti. Quum $\mathfrak{F}$ mutari possit in $x=\frac{Y}{2}\pm\frac{\sqrt{\{2(a^2-w'^2)-Y^2-2(X-w')^2\}}}{2}$, hae omnes duplicem imaginem planam ab ellipsi $\frac{Y^2}{2}+(X-w')^2-(a^2-w'^2)=o$ inclusam efficiunt.

Dum w quoque omnibus valoribus afficitur, qui permittuntur, haec ellipsois plana tamquam per axem w movetur. Ejus via includitur ab eadem linea, quae includeret, si ipsa

linea $\frac{Y^2}{2}+(X-w)^2-(a^2-w^2)=0$ sive

$w=\frac{X}{2}\pm\frac{\sqrt{(2a^2-X^2-Y^2)}}{2}$ moveretur, h. e. a linea circulari $X^2+Y^2=2a^2$.

Cum quodque punctum fixum, quod non in hac linea finienti inest, ad innumeras harum sectionum planarum pertineat; superficiem nostram infiniti vigoris h. e. quodammodo altioris dignitatis esse cernitur.

Circulum quoque praeberi, etiamsi anguli $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}=\mathfrak{x}=45^0$ sunt, facile ostendere possum. Si enim y et x ordine transmutantur, facile cerni potest, cuique sectioni constantium omnium w, x, y, z idem punctum O convenire, sive per ALMNO sive per ALM'NO (fig. 12.) proficisceris, dummodo iidem valores w, x, y, z sumantur.*). Cum autem, transmutatione facta, w et y pariter atque x et z angulum rectum constituant, eandem atque supra rationem sequi potes, tamen inter X et Y introducendas elimines et x et z.

XXIV. Eadem ratione, qua in capite proximo usi sumus, exponere possumus aequationem

$z^2+y^2+x^2+w^2+v^2+u^2=a^2$

dum sumimus lineam coordinaticiam sex partium, angulis constantibus $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=\mathfrak{W}=\mathfrak{V}=90^0$ $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}=\mathfrak{x}=\mathfrak{w}=\mathfrak{v}=90^0$ $\mathfrak{U}=\mathfrak{u}=0$. Sumamus ad permutandum

$X=x+u$ $Y=y+v$ $Z=z+w$

$x=X-u$ $y=Y-v$ $z=Z-w$

quarum auxilio x, y, z eliminatis aequatio permutata proficiscitur,

$(Z-w)^2+(Y-v)^2+(X-u)^2=a^2-w^2-v^2-u^2$

unde derivari potest

$$\frac{2a^2-Z^2-Y^2-X^2}{4}=\left(w-\frac{Z}{2}\right)^2+\left(v-\frac{Y}{2}\right)^2+\left(u-\frac{X}{2}\right)^2$$

---

*) In majore libro accuratius investigo, quae lineae coordinaticiae permittant, ut partes in quemlibet ordinem transmutentur, h. e. ut per A paralleli axes ponantur; nec non quae lineae idem ex parte, quae non permittant.

Simili ratione atque supra demonstrari potest, imaginem esse corpus solidum altioris dignitatis (tamen quodammodo tertiae, quum ad sphaeram infinities plures combinationes valorum w, v, u pertineant, quam quot combinationes w. x supra ad lineam circularem pertinebant): item corpus includi a superficie sphaerica simplici, quam aequatio $Z^2+Y^2+X^2=2a^2$ circumscribat.

XXV. Facile colligi potest, re ipsa nullum systema posse non construi, quotcunque aequationes dantur, quotcunque indeterminatae in iis insunt, quotcunque coordinatae ad id referuntur. Saepissime in aequationibus permutatis non solae coordinatae normales X, Y, Z, sed praeter eas aliae quantitates indeterminatae inerunt, quae pro non repraesentatis habendae erunt. Attamen singulae sectiones constantium omnium harum, quae non repraesentantur, in solis X, Y, Z sunt et construi posse videntur. — Si numerus quantitatum omnium variabilium (h. e. omnium indeterminatarum sive a coordinatis repraesentantur, sive non repraesentantur cum coordinatis quoque non repraesentatis) numerum aequationum aequat, imago punctis constans dabitur. Si ille numerus hunc una unitate superat, fortasse lineam habebis: si duabus superat unitatibus, superficiem exspecta: si tribus superat, corpus solidum potest exspectari. Exspectari potest, inquam: fieri enim potest, ut nulla prorsus imago detur: fieri potest, ut ad imaginem inferioris generis perveniamus, quam cujus eam fore exspectamus; ad superficies, ubi corpus exspectamus; ad puncta, ubi lineas nos nacturos esse speramus. Hujus rei exempla jam in vulgari geometria analytica occurrunt, plura in meo majore libro ostenduntur: nec non in hoc libello (cap. XXIII) tale exemplum legistis: quod tamen proprie in his exceptionibus numerandum non est. Si enim aequationem corporis ad eam lineam coordinaticiam refers, quae ex eodem plano non excedit, nullo modo corpus praeberi potest; fieri non potest, quin plana sit imago.

Attamen vidimus, eam tamquam infinito numero superficierum planarum constare, ut superficies altioris dignitatis redderetur. Similiter lineam altioris dignitatis nanci-

sceris, si aequationem superficiei vel corporis ad lineam coordinaticiam refers, quae ex eadem linea recta non excedit. Quid? si numerus quantitatum variabilium aequationes pluribus unitatibus superat quam tribus, verisimile corpora altiorum dignitatum praebentur. Num ejusmodi altiores dignitates linearum, superficierum, corporum usui futurae sint, nescio: tamen geometriae analyticae est contendere, re ipsa minime impediri, quominus aequationes quotlibet variabilium construantur.

XXVI. Quamquam hoc libro suadeo, ut novae coordinatae in geometriam introducantur; tamen multum abest, ut dicam, eas omni ex parte vulgaribus esse praeferendas. Fatendum est, vulgares coordinatas saepissime utilissimas esse, saltem ea quidem de re, quod earum usus omni ex parte tanto negotio excultus jam sit. Nulla fere alia causa ego ductus sum, qui libentissime quaestiones, quoad potui, semper ad coordinatas vulgares transduxi, quamquam lineas includentes brevius in novis coordinatis exprimere potuissem. Quotiescunque enim in his expressae erant, cuique geometrarum eas cognitas fore sciebam. Cave vero, ne ea de causa vulgares coordinatas pluris aestimes. Nisi simplicissima quaeque exempla elegissem, saepissime ad aequationes pervenissem, quarum significatio tibi non magis cognita fuisset, quam si alienis coordinatis usus essem. Eae enim lineae et superficies, quarum cognitionem coordinatis vulgaribus nacti sumus, minimo sunt numero. E contrario eadem re impeditus sum, quominus hanc disquisitionem longius producerem, quominus plura exempla darem. Dum enim aequationes in normales permutantur, vix ad finem adduci potest formularum explicatio. Quid? eidem formularum oriundarum difficultati adscribendum est, quod sententiae ex usu aequationum primi et secundi ordinis deductae putantur pertinere ad altiores quoque ordines, circa quos alia ratione opus est. Unam ex his sententiis supra aequationum $\mathfrak{F}=0$ et $(\frac{d\mathfrak{F}}{dx})=0$ significatione detegenda correxi: alia similia in majore meo libro cognosces.

Ubi novis coordinatis aliquantum operae navaverimus, certe eis non sine magnis fructibus utemur. Attamen cum novus hic campus geometriae, quem aperui, maximus sit, ut diligentissime in eo elaboretur opus est. Multa equidem jam elaboravi, quorum magnam partem jam exposui, alteram etiam majorem partem adhuc expositurus sum. Si qui geometrae his disquisitionibus delectentur, si quae facultas mihi offeratur confectae majoris libri partis typis exscribendae, libens, quae exposui, communicabo: eaque accuratius ostendent, quaecunque ad novis coordinatis utendum pertinent.

Quas sententias defensurus sim:

1) Mathesim ne dicas esse scientiam quantorum, verum scientiam quantorum quantitate comparandorum.
2) Non sine magno incommodo ars mathematica instituitur, si disciputi, antequam in ea intelligenda satis profecerunt, nullo libro quasi duce utuntur.
3) Ex methodis analysis altioris explicandae Leibnitiana non modo facillima est, sed aliis propius ad veritatem accedit.
4) Bonus hominum cultus minus schola nititur, quam quibus domesticis juvenes gavisi sint.
5) Cave ne eos, qui linguis alienis instituendi sunt, linguae vernaculae grammaticam doceas, antequam aliam cognoscere coeperint.

VITA.

Ludovicus Alexander Koch natus sum a. MDCCCXIV a. d. III. Id. Febr. in oppidulo Silesiaco, cui nomen est Charlottenbrunn, parentibus Lutheranae legis studiosis, patre Joanne Carolo Friderico, tum vectigalium coactore, matre Dorothea e gente Langnerana. Quum aliquot annis ante patri omnes fortunae bellicis perturbationibus ereptae essent; quum ipse e gravibus morbis, quibus infans laboraveram, semper aliqua corporis infirmitate gravarer; quum ad hoc me admodum puero pater mortem occumberet: non sine magnis difficultatibus eam eruditionem nactus sum, qua fretus jam doctoris philosophiae gradum capesso. Multi erant, qui benevolentia ducti matrem egentissimam permultos annos in me alendo juvarent, qui mihi rebus dubiis sollicito faverent. Etiamsi eorum nomina omitto, me uniuscujusque grato cum animo meminisse, hac occasione data denuo cognoscant. — Deinde scholis et magistris permultum debeo. Prima elementa a teneris annis me docuit magna cum cura pater ipse: in ludum litterarium itabam Mittelwaldae, in quo comitatus Glacensis oppidulo pater alii muneri simili praefectus fuerat. A. MDCCCXXVI quamquam eo jam defuncto, magna opera mater sollicita rem eo adduxit, ut Glacii vivere possem, ubi non solum duce summe reverendo M. Pohleo sacerdote lege ecclesiae evang. imbutus eamque publice professus sum, sed ubi etiam gymnasio frequentando multarum rerum cognitionem nactus sum, praecipue virorum excellentium Muelleri, Schimmeli, Langeri, Heinischi institutione. Etiam contigit, ut Vratislaviae unum annum disciplina gymnasii Magdalenaei gauderem, ut ducibus doctissimis Schoenborno, Klossmanno, Koechero meam eruditionem multum confirmarem, corrigerem, augerem. Tum in ejusdem urbis universitate litteraria ex a. d. IX Cal. Nov. anni MDCCCXXXIV usque ad a. d. VII Cal. Apr.

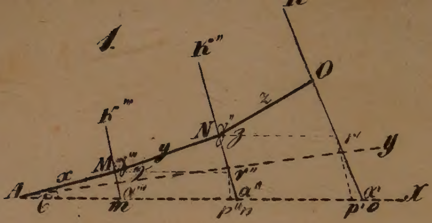
anni MDCCCXL ordini philosophorum adscriptus audivi lectiones philosophicas **Branissi**, **Thilonis**, **Elvenichi**, paedagogicas **Thilonis**, theologicas **Schulzi**, **Hahni Rhodei**, mathematicas **Scholtzi**, **Kletkei**, **Koecheri**, physicas **Pohli**, **Frankenheimi**, **Boguslawskii**, **Fischeri**, **Gravenhorsti**, **Glockeri**, philologicas **Schneideri**, **Ritchli**, **Ambroschi**, **Bellmanni**, historicas **Wachleri**, **Stenzeli**, **Kutzeni**, **Schoeni**. Quibus viris doctissimis omnibus cum maximas gratias debeam et agam, tum in primis viro clarissimo a Bogulawskio etiamque majores viro doctissimo Scholtzo. Qui animum meum obstrinxerunt privata adhuc institutione frequentissima, prudentibus consiliis, multis aliis beneficiis. Quid? hujus lectionibus debui, quod anno MDCCCXXXVII. mihi, qui responderam ad quaestionem mathematicam ab amplissimo Ordine philosophorum propositam hanc:

„Quam vim geometria haberet in algebram et praecipue in calculum differentialem et integralem“

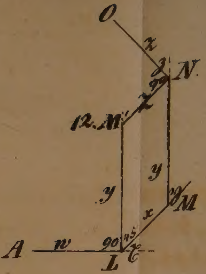
primae delatae sunt.

Id tamen admodum doleo, quod mater, cui maxime de me sollicitae, optime meritae longe gratissimum debeo animum, has sollemniores gratias, quas ei ago, non amplius audit. Contigit quidem mihi, ut Vratislaviam transmigraret; ut aliquot annos una viveremus: tamen cum ejus corpus continuis calamitatibus infirmissimum jam redditum esset, auctumni proximi prima frigora non amplius tolerare potuit.

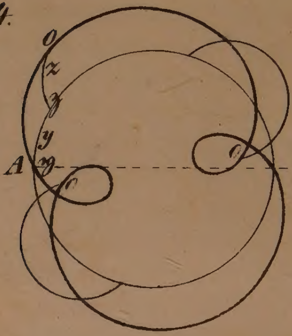
1.

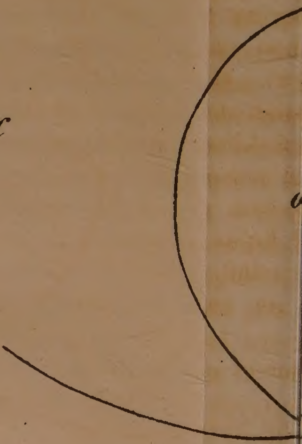


12.

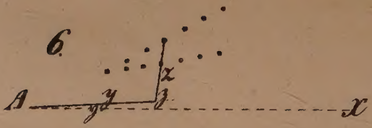


4.

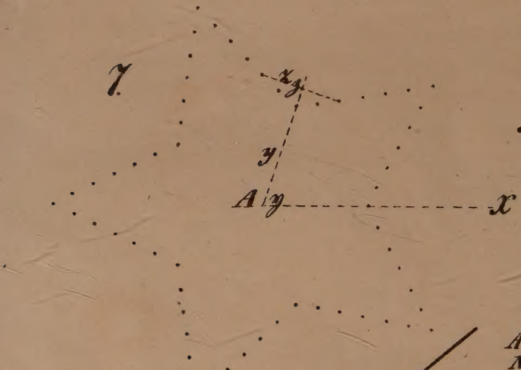




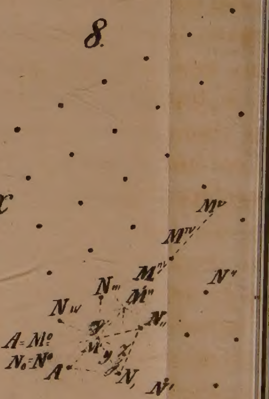
6.



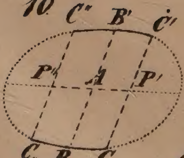
7.



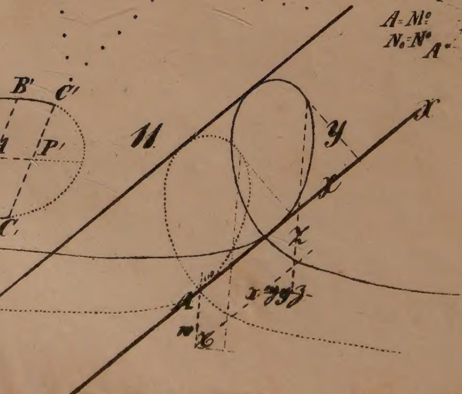
8.



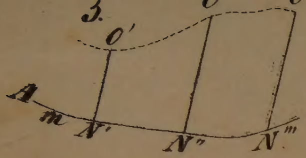
10.

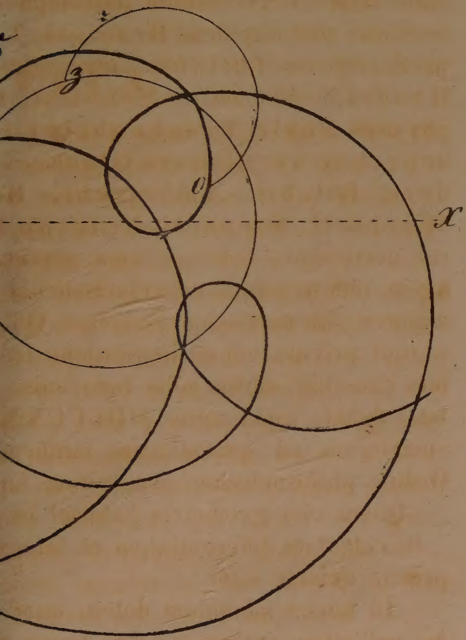


11.



3.





9.

